

Que signifient AON et AOA ?

Par : Abdel YEZZA, Ph.D.

Date : avril 2011 / mise à jour oct. 2012 (ajout de la section 3 et augmentation de la section 1)

Sommaire

1. Concepts	2
2. Méthode PCM appliquée à un réseau AON.....	5
3. Méthode PCM appliquée à un réseau AOA.....	9
4. Application à un exemple	11
5. Un autre exemple plus complexe !.....	17

Liste des figures

Fig 1. Concepts en résumé.....	2
Fig 2. Élément de base du concept AON.....	3
Fig 3. Éléments de base du concept AOA.....	4
Fig 4. Schéma réseau type AON	7
Fig 5. Dépendance des tâches de type FD	7
Fig 6. Dépendance des tâches de type FF.....	7
Fig 7. Dépendance des tâches de type DD	8
Fig 8. Dépendance des tâches de type DF.....	8
Fig 9. Dépendance des tâches de type FD+x jours.....	8
Fig 10. Schéma réseau type AOA.....	11
Fig 11. Réseau AON de l'exemple	12
Fig 12. Représentation graphique du chemin critique	14
Fig 13. Snapshot du planning MS Project de l'exemple.....	15
Fig 14. Réseau AON dans MS Project.....	16
Fig 15. Timeline dans MS Project de l'exemple.....	16
Fig 16. Réseau AON du 2 ^{ème} exemple	18

1. Concepts

Les abréviations **AON** et **AOA** signifient successivement : **Activity On Network** et **Activity On Arc**. Ces deux notions sont utilisées dans la représentation par le biais d'un réseau de gestion de projet, à son tour faisant partie d'une branche plus générale et plus large appelée : La **Théorie des Graphes**. Cette dernière est utilisée notamment dans plusieurs domaines comme le transport, les réseaux neurones ou l'optimisation etc. Nous mettons l'accent ici sur son utilisation dans la gestion des projets. Ces deux concepts ont été développés dans les années 50, AON pour établir ce qu'on appelle le *chemin critique* d'un planning de projet et AOA dans la *méthode (graphe) de PERT*, sujets que nous n'aborderons pas en détails ici. AON est utilisé notamment dans la méthode appelée **PDM (Precedence Diagram Method)**, comme nous allons développer ci-dessous. En quelques mots, il s'agit de définir le séquençage logique et cohérent d'un ensemble d'activités ayant un début et une fin tout en optimisant la durée totale. Cette dernière est utilisée entre autres, dans le **CPM (Critical Path Method)** pour déterminer le chemin critique comme nous allons le découvrir dans la suite de cet article.

Tous d'abord, voici un schéma illustrant en quelques mots ces deux concepts:

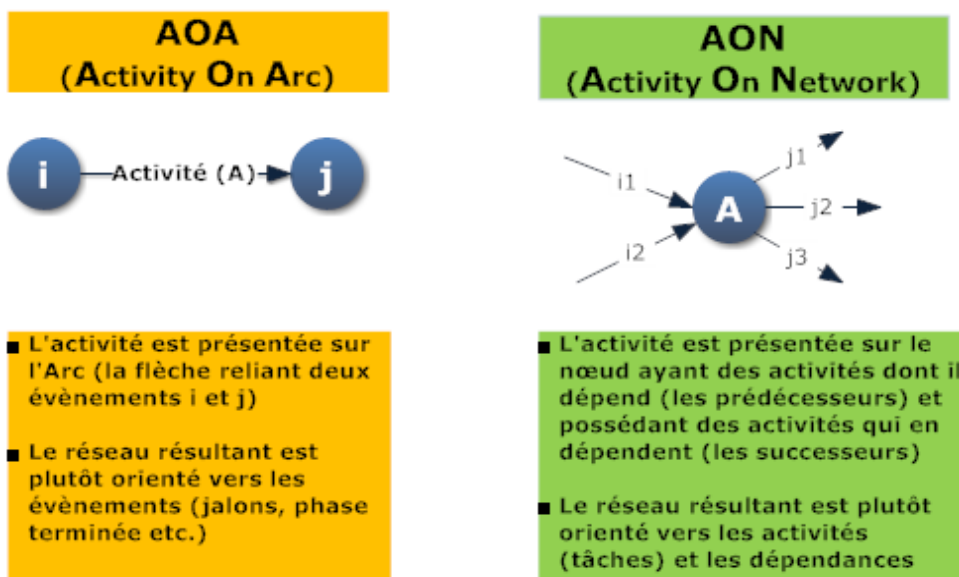


Fig 1. Concepts en résumé

Afin d'introduire les éléments fondamentaux utilisés par l'AON, voici un schéma sommatif présentant un nœud, les définitions des acronymes **ES**, **EF**, **LS**, **LF** et **D** ainsi qu'un exemple simple de réseau d'un petit projet formé des tâches (activités) A, B, C, D, E, F et G :

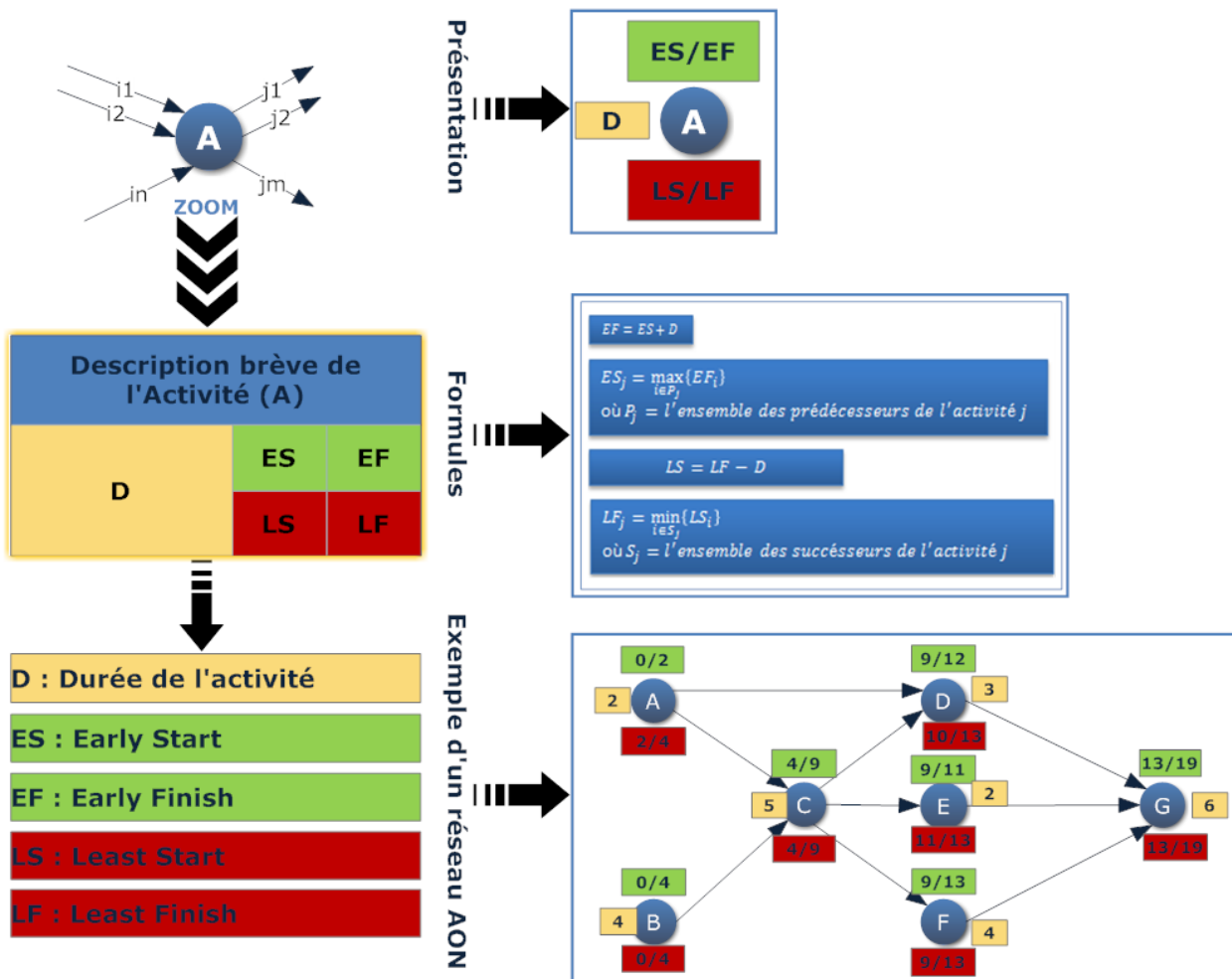


Fig 2. Élément de base du concept AON

Ci-dessous le les éléments fondamentaux du concept **AOA** appliqués au même réseau indiqué dans le réseau **AON** ci-dessous afin de pouvoir distinguer les deux représentations:

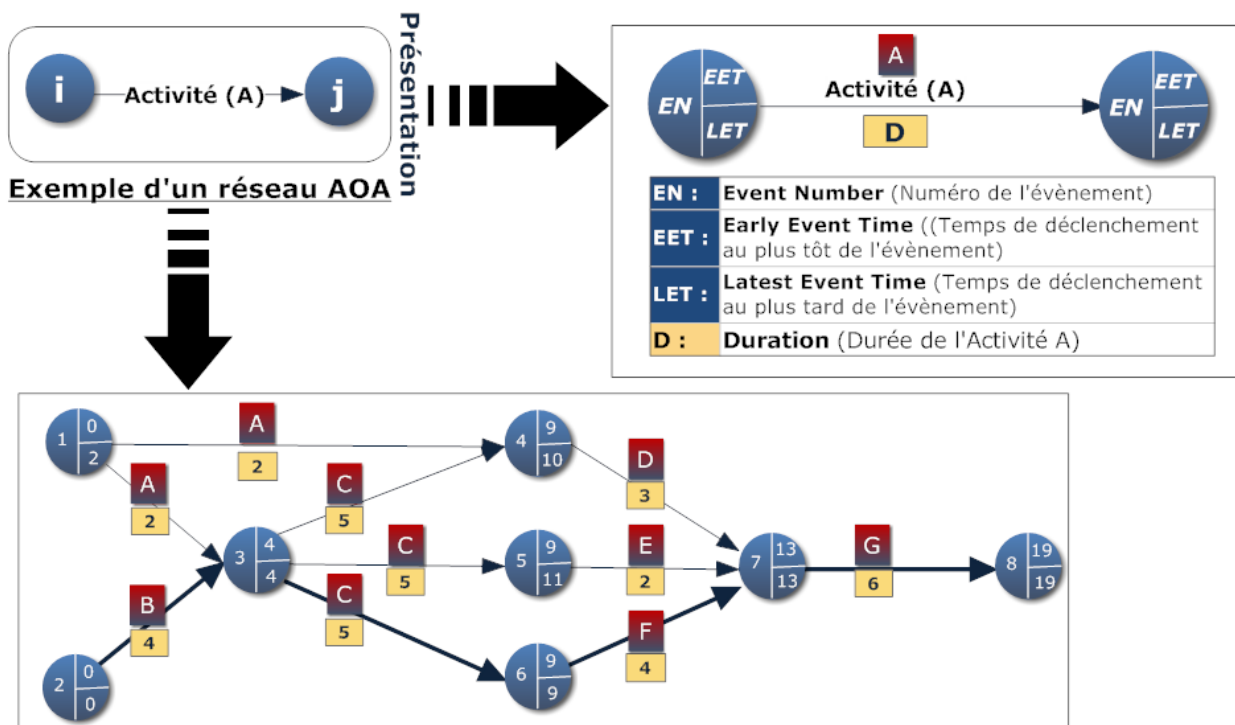


Fig 3. Éléments de base du concept AOA

2.Méthode PCM appliquée à un réseau AON

Afin de construire le réseau en appliquant la méthode PCM indiquée précédemment, voici les étapes à suivre dans le cas d'un réseau de type AON :

Effectuer les calculs dans le même ordre que les sens des flèches et d'une manière itérative en utilisant les valeurs initiales (dans MS Excel par exemple) :

Traversée en avant :

- Pour le 1er nœud : $ES=0$
- Pour tous les nœuds, utiliser la formule : $EF = ES + D$
- Pour les nœuds suivants, utiliser d'une manière itérative la formule : $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$ P étant les nœuds des prédécesseurs du nœud j

Traversée en arrière :

- Pour le dernier nœud : $LF=EF$
- Pour tous les nœuds, utiliser la formule : $LS = LF - D$
- Pour les nœuds précédents, utiliser d'une manière itérative la formule : $LF_j = \min_{i \in S} \{LS_i\}$ S étant les nœuds des successeurs du nœud j

Etape 1 : Initialisation

Activité	Durée (D)	ES	EF	LS	LF	Prédécesseurs	Successeurs
A	2	0	0	0			C
B	4	0	0	0			C
C	5					A,B	D, E, F
D	3					C	G
E	2					C	G
F	4					C	G
G	6					D, E, F	

Etape 2 : Calcul des ES et EF en avant (en débutant par A)

Activité	Durée (D)	ES $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$	EF $EF = ES + D$	LS	LF	Prédécesseurs	Successeurs
A	2	0	2	0			C
B	4	0	4	0			C
C	5	4	9			A,B	D, E, F
D	3	9	12			C	G
E	2	9	11			C	G
F	4	9	13			C	G
G	6	13	19			D, E, F	

Etape 3 : Calcul des LS et LF en arrière (en débutant par G)

Activité	Durée (D)	ES $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$	EF $EF = ES + D$	LS $LS = LF - D$	LF $LF_j = \min_{i \in S} \{LS_i\}$	Prédécesseurs	Successeurs
A	2	0	2	2	4		C
B	4	0	4	4	4		C
C	5	4	9	4	9	A,B	D, E, F
D	3	9	12	10	13	C	G
E	2	9	11	11	13	C	G
F	4	9	13	9	13	C	G
G	6	13	19	13	19	D, E, F	

Remarques et notions supplémentaires :

- Une **tâche débutante** est une tâche sans aucun prédécesseur
- Une **tâche finale** est une tâche sans aucun successeur
- En Identifiant l'ensemble des **prédécesseurs** des nœuds, ceci revient à identifier les **successeurs** d'une manière équivalente (l'un peut être déduit de l'autre)
- Si la tâche finale n'est pas unique, afin de rendre la dernière tâche unique (clôturant le projet), il suffit de créer une tâche fictive ayant une durée nulle (un jalon) et ayant comme prédécesseurs, toutes les tâches finales
- La même règle s'applique dans le cas de plusieurs tâches débutantes, il suffit de créer une tâche débutante unique ayant une durée nulle et comme successeurs, toutes les tâches débutantes
- Toutes les tâches débutantes possèdent un $ES=0$ et un $LS=0$ et toutes les tâches finales, possèdent un $LS=ES$ et un $LF=EF$
- La durée d'un planning est obtenue par la valeur de $LF=EF$ du dernier nœud (dernière tâche même s'il s'agit d'un jalon)
- La **marge totale** d'une tâche est égale au délai maximum que celle-ci peut être retardée sans pour autant affecter le début au plus tard d'aucune tâche suivante. Par conséquent, si la marge totale d'une tâche est négative, ceci signifie qu'elle a débuté au-delà de la marge tolérée et que le projet va subir un retard, car toutes les tâches successeurs de cette tâche vont être retardées.
- La **durée d'un planning** est la longueur du **chemin le plus long** allant du début à la fin du réseau. Les nœuds de ce chemin sont appelés les **nœuds critiques (tâches critiques)** et forment ce qu'on appelle le **chemin critique**. Ce dernier correspond concrètement à toutes les tâches ne pouvant être retardées (au-delà de leurs marges totales) sans augmenter la durée totale du projet, autrement dit, il est formé de toutes les tâches ordonnées et ayant la plus petite marge totale. A noter que le **chemin critique n'est pas unique** et un nœud critique peut appartenir à plusieurs chemins critiques à la fois. Evidemment plus il y a des chemins critiques, plus le planning est difficilement réalisable et plus exigeant, mais aussi peut-être plus optimisé aussi ! La notion de chemin critique est d'une manière équivalente reliée aussi aux **marges des tâches** et correspond à toutes les tâches ayant une marge totale nulle ou la plus petite parmi toutes les tâches qui viennent immédiatement après la tâche courante. Dans le réseau de l'exemple précédent, le chemin critique est formé des tâches : **B, C, F et G** dans cet ordre. Ce chemin est obtenu simplement en sélectionnant tous les nœuds ayant **$ES=LS$ et $EF=LF$** (i.e., sans aucune marge ni avant ni après) comme indiqué dans la figure ci-dessous (par des flèches plus épaisses) :

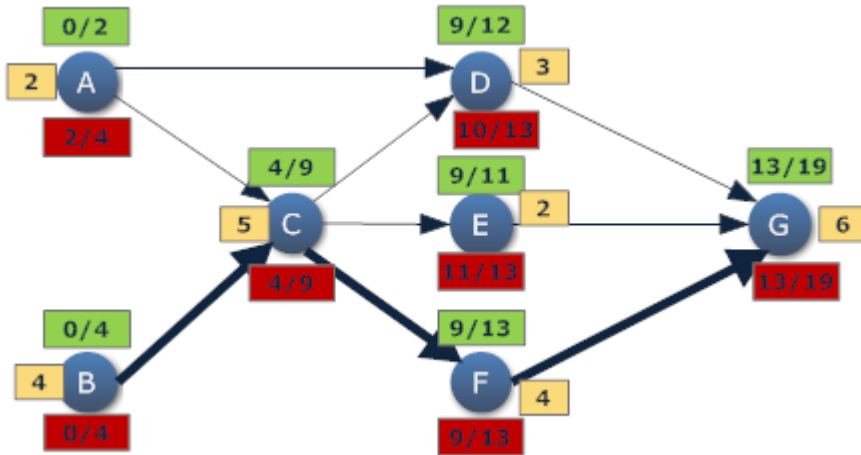


Fig 4. Schéma réseau type AON

D'où l'importance en tant que chef de projet de bien surveiller les tâches faisant partie du (des) chemin(s) critique(s).

- Numériquement, la **marge totale** d'une tâche est définie comme étant la différence entre ES et LS : **Marge=LS-ES=LF-ES-D=LF-EF**. Voici le tableau des tâches comprenant en plus les marges et les tâches appartenant au chemin critique (celles avec la plus petite marge) :

Etape 4 : Chemin critique

Activité	Durée (D)	ES $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$	EF $EF = ES + D$	LS $LS = LF - D$	LF $LF_j = \min_{i \in S} \{LS_i\}$	Prédécesseurs	Successeurs	Marge	Nœud critique ?
A	2	0	2	2	4		C	2	Non
B	4	0	4	4	4		C	0	Oui
C	5	4	9	4	9	A,B	D, E, F	0	Oui
D	3	9	12	10	13	C	G	1	Non
E	2	9	11	11	13	C	G	2	Non
F	4	9	13	9	13	C	G	0	Oui
G	6	13	19	13	19	D, E, F		0	Oui

A noter que plus la somme des marges est importante plus on a de la flexibilité quant au début des tâches ayant des marges et vice-versa, si la somme des marges est trop petite, le planning est très serré et contraignant. D'autres types de marges existent et sont très peu utilisées dans la pratique, raison pour laquelle nous ne les évoquerons pas ici.

- Il existe plusieurs relations utilisées dans le séquençement des tâches. Les plus utilisées sont :
 - FD** : Fin à Début (la tâche suivante ne débutera qu'après la fin de la tâche courante)

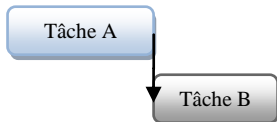


Fig 5. Dépendance des tâches de type FD

- FF** : Fin à Fin (la tâche suivante et la tâche courante doivent se terminer au même temps)

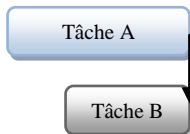


Fig 6. Dépendance des tâches de type FF

- **DD** : Début à Début (la tâche suivante et la tâche courante doivent se commencer au même temps)

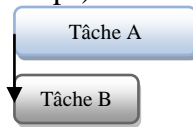


Fig 7. Dépendance des tâches de type DD

- **DF** : Début à Fin (la tâche courante ne doit commencer qu'au moment de la fin de la tâche suivante) - rarement utilisée

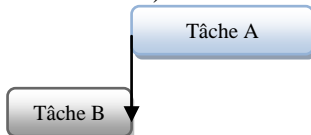


Fig 8. Dépendance des tâches de type DF

Des outils de gestion de plannings permettent de définir d'autres types de relations combinant ces 4 relations avec l'utilisation des marges comme par exemple une relation de type : $FD+2j$, autrement dit, la tâche suivante ne débutera qu'après 2 jours de la fin de la tâche courante comme indiqué ci-dessous :

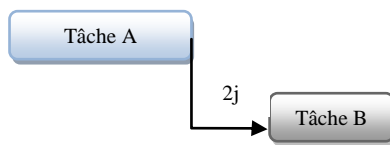


Fig 9. Dépendance des tâches de type $FD+x$ jours

Note : Aucune **tâche orpheline** (sans successeur ou prédécesseur) dans un planning ne doit exister, car le planning comme nous l'avons déjà vu représente un réseau avec un début unique et une fin unique. Même dans le cas où plusieurs tâches débutent au même moment ou se terminent au même moment, il suffit de créer une tâche fictive unique débutante ou finale comme nous allons le voir dans la suite (sections : [Application à un exemple](#) et [Un autre exemple plus complexe !](#)).

3.Méthode PCM appliquée à un réseau AOA

Le principe de la **méthode PCM** appliqué au réseau **AOA** est le même que celui de la méthode appliquée au réseau **AON** en mettant l'accent plutôt sur les événements (déclencheurs d'activités) délimitant les activités dans le temps.

Traversée en avant :

- Pour le 1er nœud (événement) : $EET = 0$
- Pour tous les nœuds (événements) suivants, utiliser la formule :

$$EET = \max_{i \in P} \{EET_i + D\}$$

P étant les nœuds des prédécesseurs du nœud courant. La valeur de EET du dernier représente la longueur

du chemin le plus long, autrement dit, la durée totale du planning.

Traversée en arrière :

- Pour le dernier nœud : $LET = EET$ La valeur de EET est calculée dans la traversée en avant.
- Pour les nœuds (événements) précédents, utiliser d'une manière itérative la formule :

$$EET = \min_{i \in S} \{LET_i - D\}$$

S étant les nœuds des successeurs du nœud courant. La valeur de LET du (ou des) premier(s) nœud(s) doit être égale à 0.

Etape 1 : Initialisation

Evènement	Activité déclenchée	Durée (D)	EET	LET	Prédécesseurs
1	A	2			
2	B	4			
3	C	5			A, B
4	D	3			C
5	E	2			C
6	F	4			C
7	G	6			D, E, F
8					G

Etape 2 : Calcul des EET en avant (en débutant par 1 & 2)

Evènement	Activité déclenchée	Durée (D)	EET	LET	Prédécesseurs
1	A	2	0		
2	B	4	0		
3	C	5	4		A,B
4	D	3	9		C
5	E	2	9		C
6	F	4	9		C
7	G	6	13		D, E, F
8			19		

Etape 3 : Calcul des LET en arrière (en débutant par 8)

Evènement	Activité déclenchée	Durée (D)	EET	LET	Prédécesseurs
1	A	2	0	0	
2	B	4	0	0	
3	C	5	4	4	A,B
4	D	3	9	10	C
5	E	2	9	11	C
6	F	4	9	9	C
7	G	6	13	13	D, E, F
8			19	19	

Etape 4 : Marges et Chemin critique

Evènement	Activité déclenchée	Durée (D)	EET	LET	Prédécesseurs	Marge (EET-LET)	Nœud critique ?
1	A	2	0	2		2	Non
2	B	4	0	0		0	Oui
3	C	5	4	4	A,B	0	Oui
4	D	3	9	10	C	1	Non
5	E	2	9	11	C	2	Non
6	F	4	9	9	C	0	Oui
7	G	6	13	13	D, E, F	0	Oui
8			19	19		0	Oui

Le réseau de type AOA correspondant est le suivant :

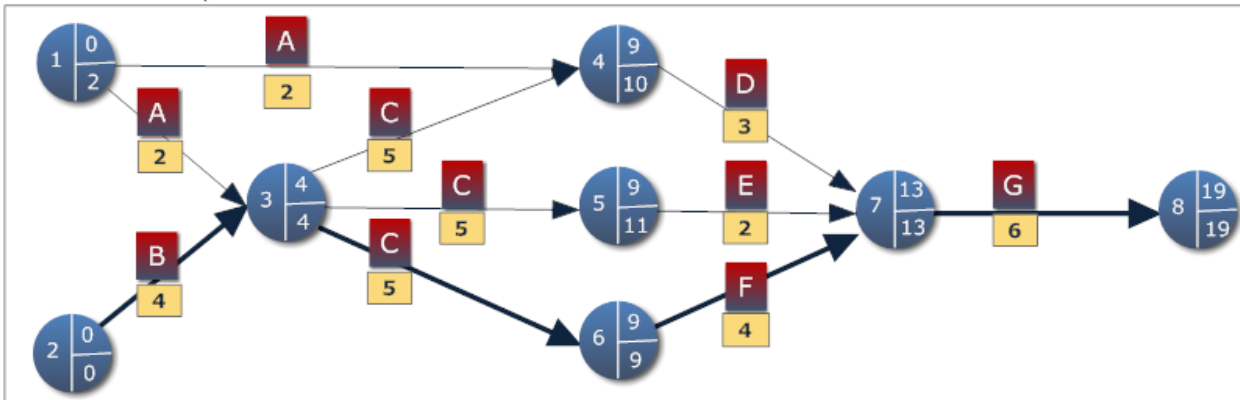


Fig 10. Schéma réseau type AOA

4. Application à un exemple

Pour finir, voici un exemple extrait du site de J E Beasley (voir : <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/netaon.html>) extrait à son tour de l'examen de certification PMP : **Network analysis example 1996 UG exam :**

Exemple d'examen : La table ci-dessous représente les activités d'un petit projet :

Network analysis example 1996 UG exam		
Activité	Durée (semaines)	Prédécesseurs
A	3	
B	1	A
C	2	B, A
D	7	
E	8	D, A
F	3	B
G	1	E, F
H	2	D

- Construire le réseau correspondant
- Calculer la durée totale minimale du projet et identifier les activités critiques
- Quelle est la marge flottante associée à chaque activité non-critique

Solution :

Comme indiqué dans les remarques précédentes et comme le réseau AON du projet se termine par plusieurs tâches C, H et G, il faut créer une tâche fictive finale I unique ayant une durée=0 et comme

prédécesseurs toutes les tâches précédentes, ce qui donne le réseau suivant :

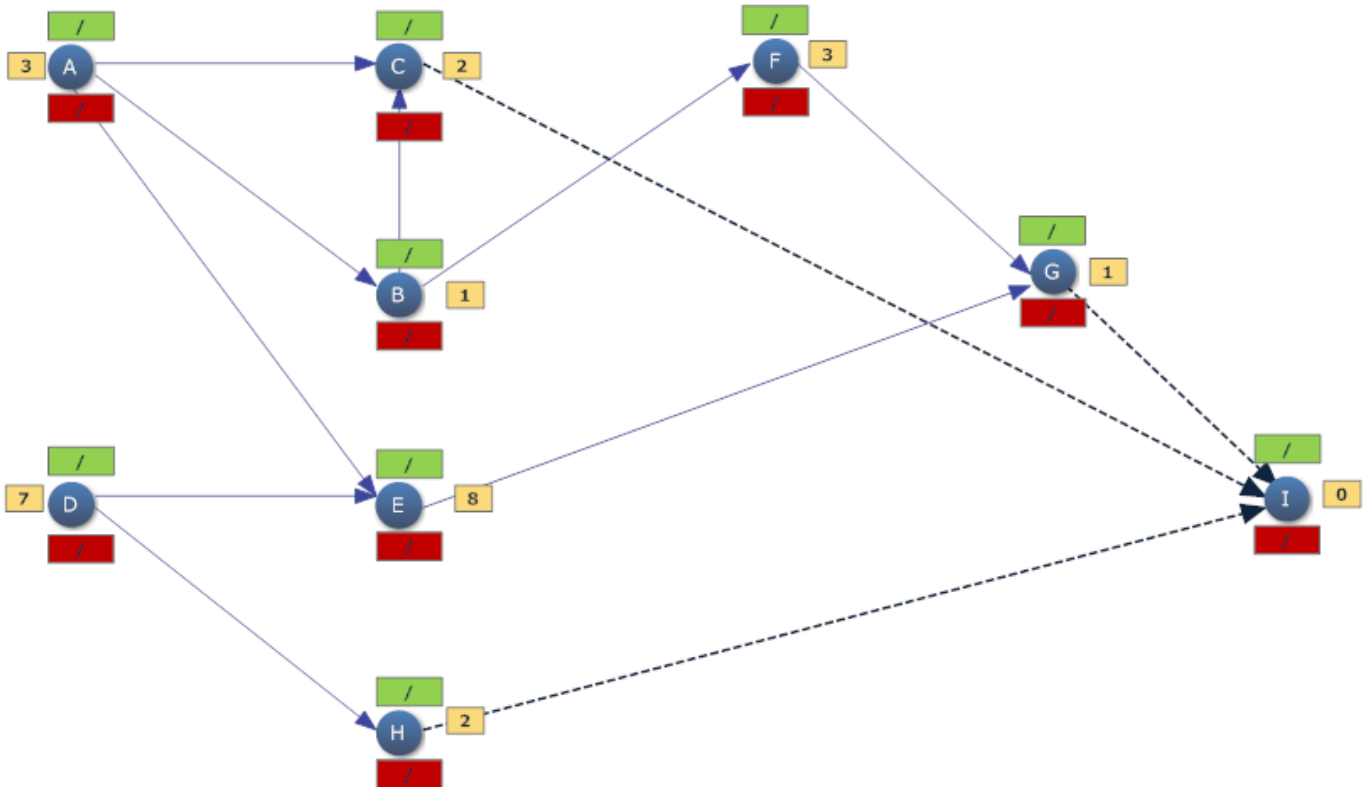


Fig 11. Réseau AON de l'exemple

Pour répondre aux 2ème et 3ème questions, il suffit de reprendre les étapes 2 et 3 comme indiqué ci-dessus en complétant les valeurs de ES, EF, LS et LF dans le même ordre que les sens des flèches ainsi que la marge = LS-ES :

Etape 2 : Calcul des ES et EF en avant (en débutant par A et D)

Tâche	Durée (D)	ES $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$	EF $EF = ES + D$	LS	LF	Prédécesseurs	Successeurs
A	3	0	3	0	0		C, B, E
B	1	3	4	0	0	A	C, F
C	2	4	6			B, A	I
D	7	0	7				E, H
E	8	7	15			D, A	G
F	3	4	7			B	G
G	1	15	16			E, F	I
H	2	7	9			D	I
I	0	16	16			C, H, G	

Etape 3 : Calcul des LS et LF en arrière (en débutant par I)

Tâche	Durée (D)	ES $ES_j = \max_{i \in P} \{EF_i\}$	EF $EF = ES + D$	LS $LS = LF - D$	LF $LF_j = \min_{i \in S} \{LS_i\}$	Prédécesseurs (P)	Successeurs (S)	Marge (LS-ES)	Nœud critique ?
A	3	0	3	4	7		C, B, E	4	Non
B	1	3	4	11	12	A	C, F	8	Non
C	2	4	6	14	16	B, A	I	10	Non
D	7	0	7	0	7		E, H	0	Oui
E	8	7	15	7	15	D, A	G	0	Oui
F	3	4	7	12	15	B	G	8	Non
G	1	15	16	15	16	E, F	I	0	Oui
H	2	7	9	14	16	D	I	7	Non
I	0	16	16	16	16	C, H, G		0	Oui

Les nœuds non critiques possèdent des marges positives comme indiqué dans l'avant dernière colonne du tableau ci-dessous (puisque tous les nœuds critiques ont une marge totale nulle). On déduit que le projet a une durée totale minimale de **16 semaines**. Les activités critiques **D, E, G** et **I** forment le chemin critique dans cet ordre.

Voici une méthode graphique simple et efficace qui permet de visualiser le chemin critique d'une manière automatique en utilisant par exemple MS Excel en se basant sur le tableau précédent, ce qui nous donne le graphe suivant :

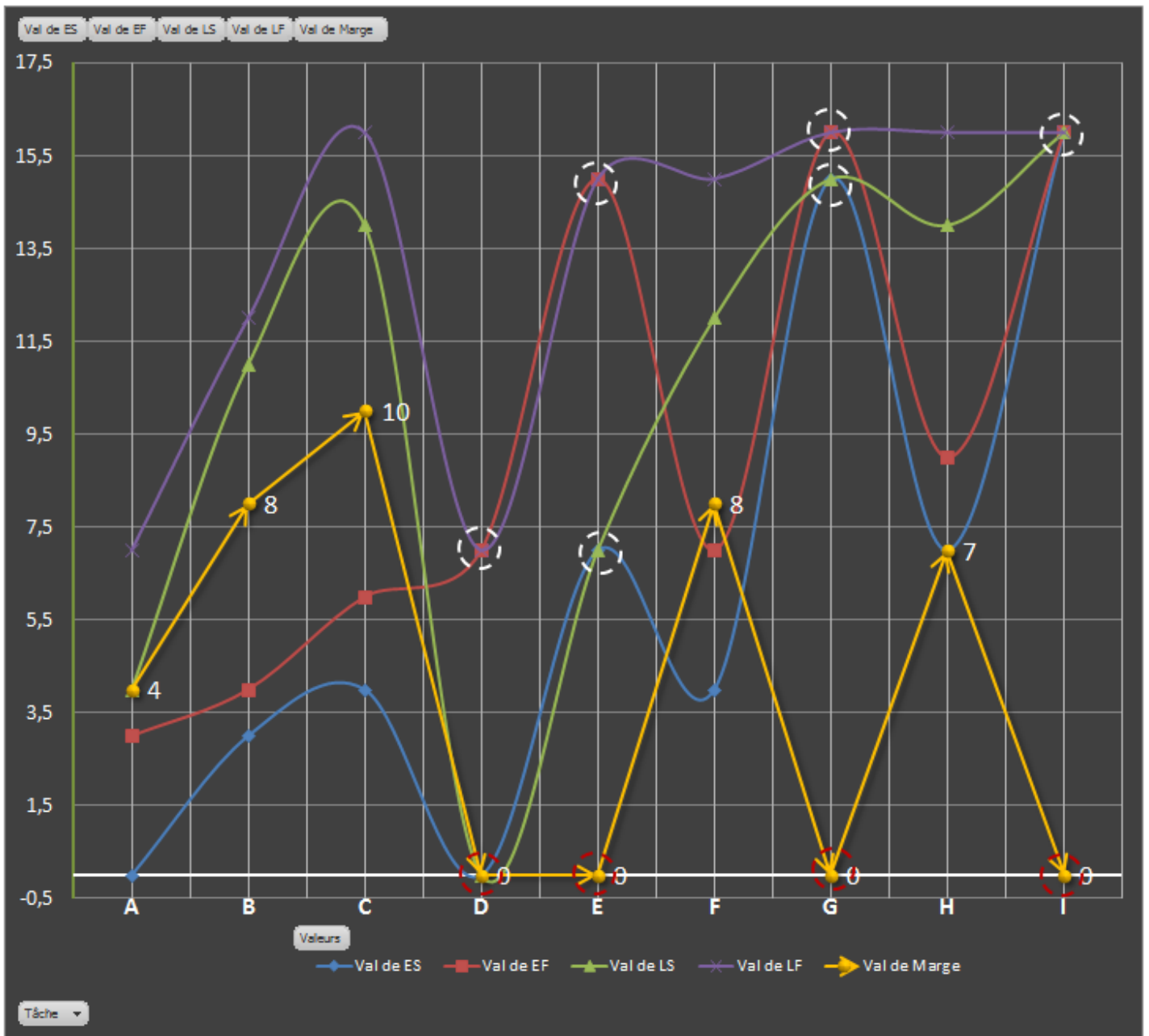


Fig 12. Représentation graphique du chemin critique

Voici quelques constatations confirmant les notes et propriétés annoncées précédemment :

- Les nœuds encerclés en rouge **D**, **E**, **G** et **I** sont les nœuds critiques ayant une marge nulle
- Les valeurs correspondantes aux nœuds critiques ont **EF** et **LF** identiques (encerclées en blanc)
- Les valeurs correspondantes aux nœuds critiques ont **ES** et **LS** identiques (encerclées en blanc)

Détendez-vous, dans des vrais projets, heureusement vous devez disposer d'un outil destiné à la gestion et le suivi des activités et données des projets sur plusieurs facettes, le planning, les ressources, le budget, les dépenses etc. Pour notre exemple simple ci-dessous, voici respectivement le **diagramme de GANTT y compris le chemin critique (en rouge) et la durée totale du projet**, le **diagramme réseau** (de type AON) et le **Project TimeLine** obtenus en quelques minutes dans MS Project 2010 :

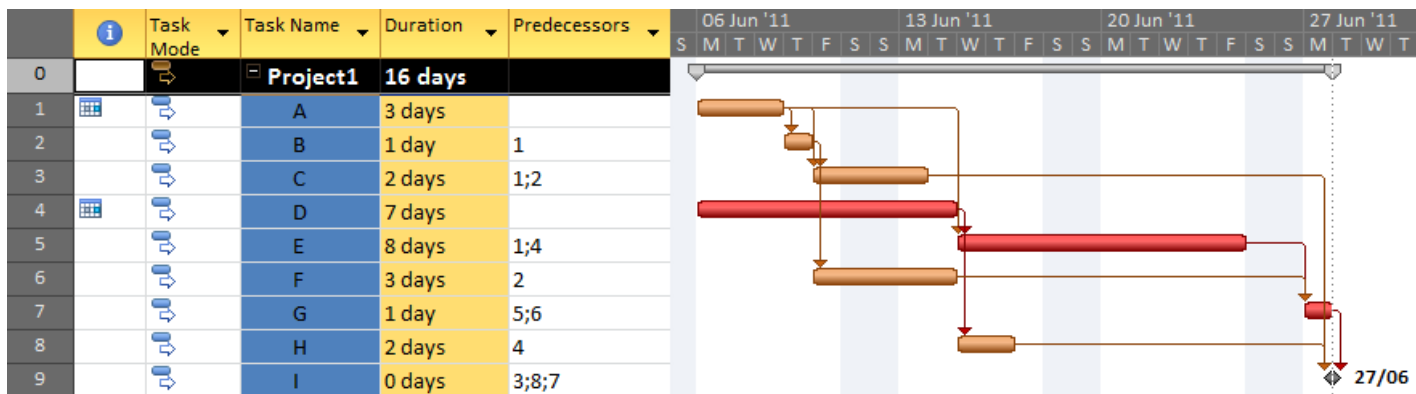


Fig 13. Snapshot du planning MS Project de l'exemple

NOTE : A ne pas confondre la durée d'un planning et la charge du travail totale consacrée pour réaliser toutes les tâches du planning. Dans l'exemple ci-dessus :

- La charge totale = 27 jours homme (JH)
- La durée totale = 16 jours

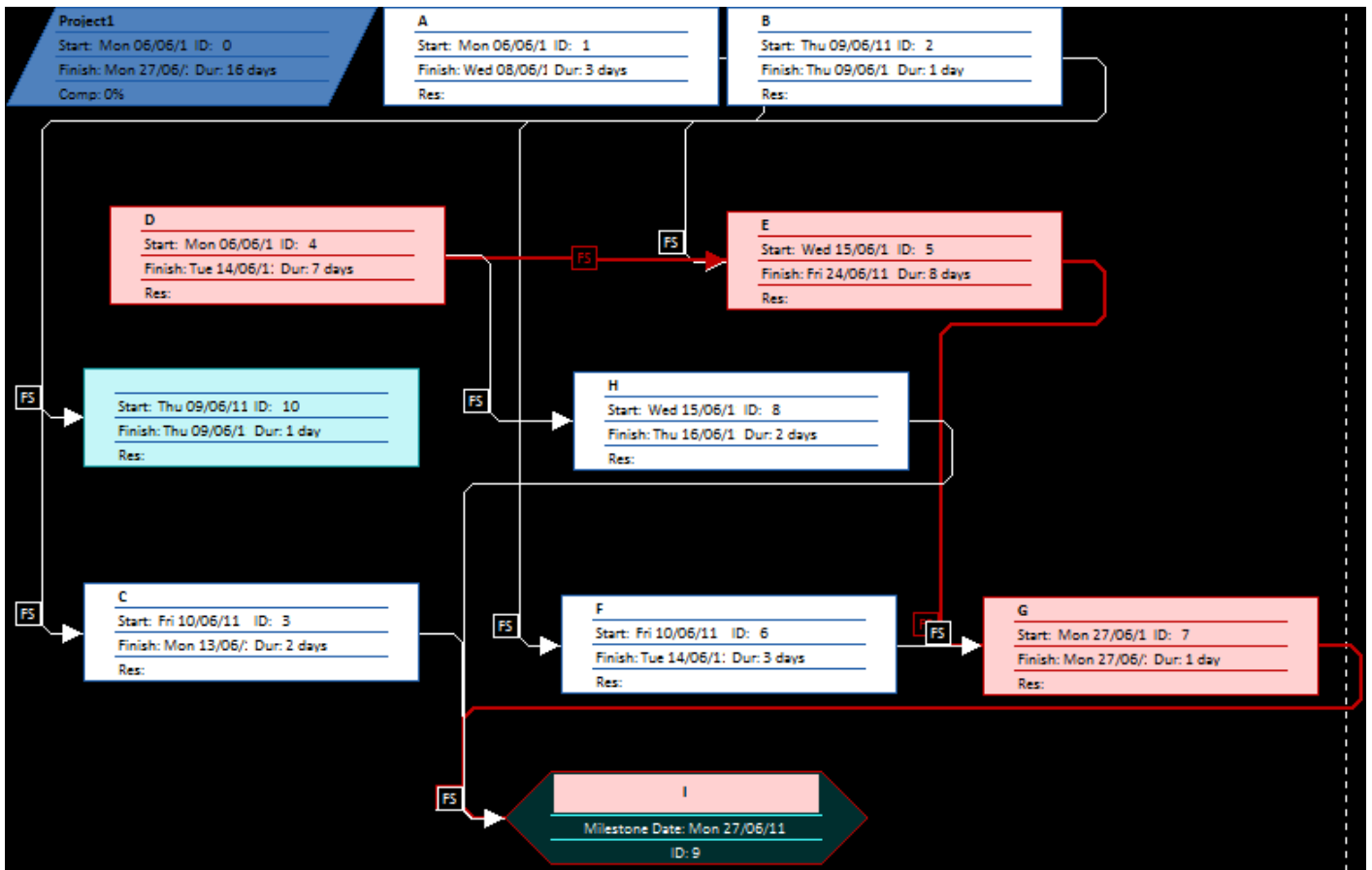


Fig 14. Réseau AON dans MS Project

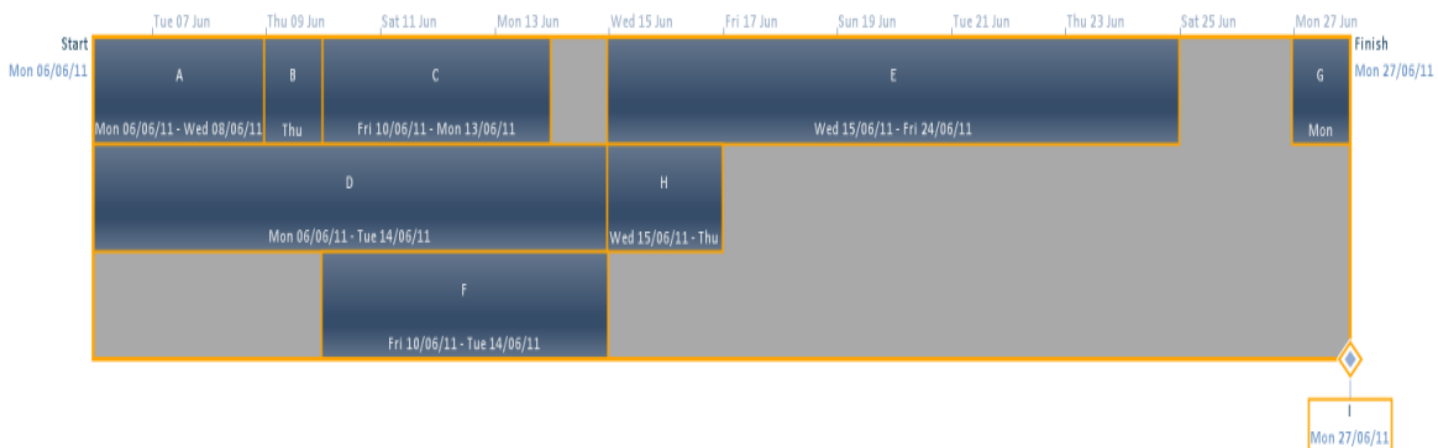


Fig 15. Timeline dans MS Project de l'exemple

5. Un autre exemple plus complexe !

Pour finir cet article en beauté et en guise d'exercice, voici un exemple un peu plus complexe :

Le tableau suivant indique la liste des tâches d'un planning, leurs durées et leurs successeurs :

Tâche	Durée (D) en jours	Successeurs (S)
A	3	C, D, E
B	2	C, E
C	5	F
D	4	E, F
E	2	G
F	2	H, I
G	6	H, I, J, K
H	7	J, K
I	8	J
J	1	
K	5	L, M
L	3	
M	3	

- Construire le réseau AON correspondant
- Déterminer les valeurs de ES, EF, LS et LF de chaque tâche
- Déduire le (les) chemin(s) critiques du planning et la durée minimale du projet

Sans vous fournir les détails, voici les réponses résumées dans le réseau correspondant suivant avec les deux chemins critiques et une durée minimale du projet de 30J.

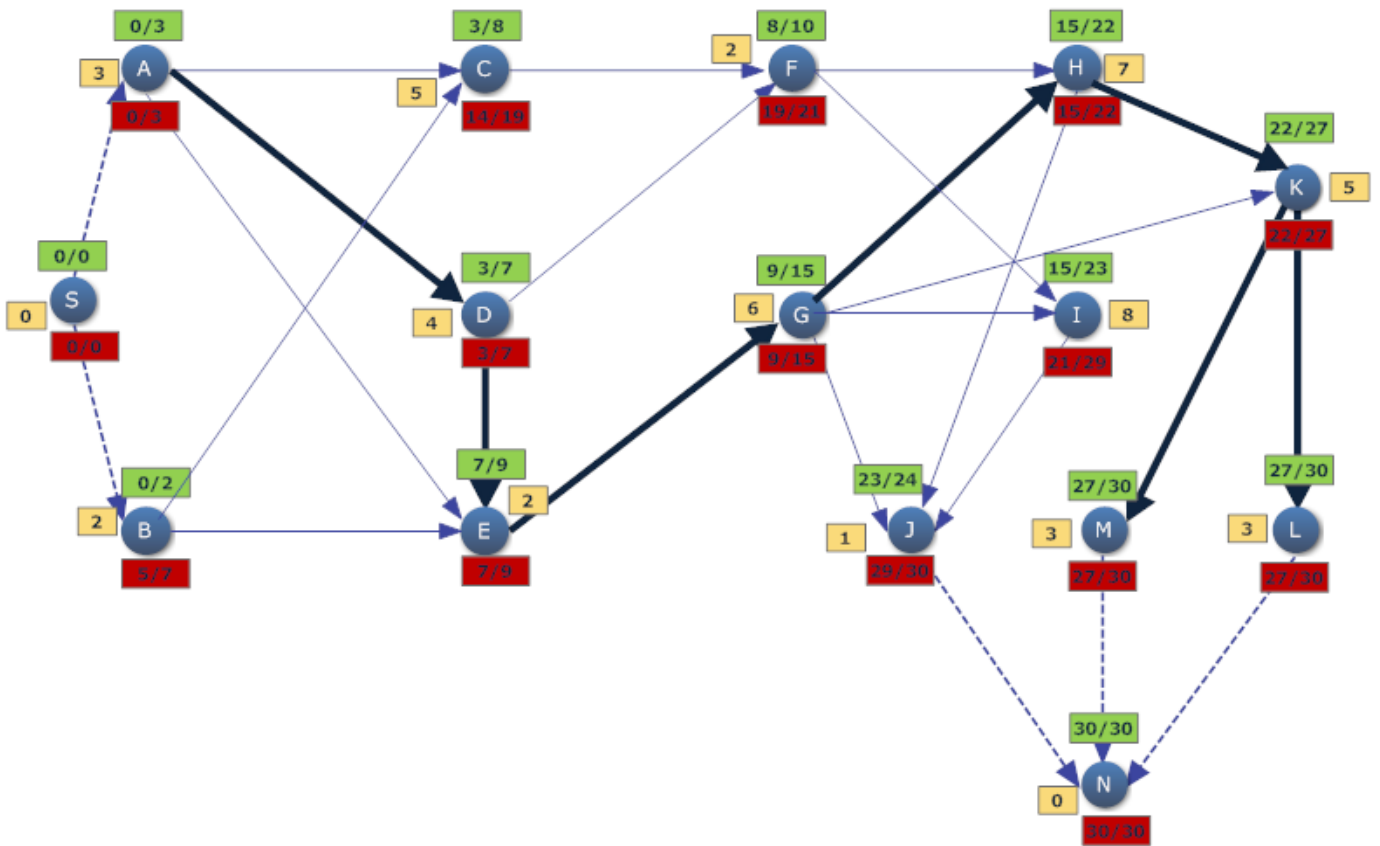


Fig 16. Réseau AON du 2^{ème} exemple